УДК 514.75

Е. А. Коломыцева

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ВТУЛОЧНЫХ СВЯЗЕЙ, СОВМЕСТИМЫХ С *ARG*-ДЕФОРМАЦИЯМИ ПОВЕРХНОСТЕЙ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. Даются достаточные условия существования счетного множества обобщенных втулочных связей, совместимых с нетривиальными ARG-деформациями поверхностей положительной внешней кривизны с краем в римановом пространстве при заданном коэффициенте рекуррентности.

Ключевые слова: риманово пространство, поверхность, внешняя кривизна, обобщенная втулочная связь, ARG-деформация.

Abstract. The sufficient conditions of the existence of the denumerable set of the generalized hub relations compatible with the nontrivial ARG-deformations of the surfaces of positive curvature with boundary in a Riemannian space with the preassigned coefficient of the recurrent are given.

Keywords: Riemannian space, surface, exterior curvature, generalized hub relation, ARG-deformation.

1. Предварительные сведения

Пусть R^3 – трехмерное риманово пространство с координатами y^α $(\alpha = 1,2,3)$ и метрикой $ds^2 = a_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta$, где $a_{\alpha\beta} \in C^{4,\nu}$, $0 < \nu < 1$, F^2 – $(m+1)$-связная поверхность с краем, заданная уравнениями $y^\alpha = f^\alpha\left(x^1, x^2\right)$, $\alpha = 1,2,3$, $\left(x^1, x^2\right) \in D$, где $f^\alpha\left(x^1, x^2\right)$ – функции класса $C^{3,\nu}(D)$. Пусть далее граница ∂D области D принадлежит классу $C^{2,\nu}$, $0 < \nu < 1$. Эти условия будем называть условиями регулярности поверхности. Будем считать, что внешняя кривизна поверхности положительна $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \mathrm{const}$. Рассмотрим бесконечно малую деформацию $\left\{F_\varepsilon^2\right\}$ ($F_0^2 = F^2$) поверхности F^2, определяемую уравнениями $y_\varepsilon^\alpha = y^\alpha + \varepsilon z^\alpha$, где z^α – векторное поле смещения точек поверхности F^2 при ее деформации; ε – малый параметр. Представим поле смещения в виде суммы $z^\alpha = z_\tau^\alpha + z_n^\alpha$, где $z_\tau^\alpha = a^i y_{,i}^\alpha$ – тангенциальная составляющая поля z^α; $z_n^\alpha = cn^\alpha$ – нормальная составляющая поля z^α; n^α – поле единичных векторов нормалей к поверхности F^2, $y_{,i}^\alpha = \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}$, $i = 1,2$.

Бесконечно малую деформацию $\{F_\varepsilon{}^2\}$ поверхности F^2 называют ARG-деформацией [1], если выполняются условия:

1) вариация $\delta(d\sigma)$ элемента площади $d\sigma$ поверхности F^2 удовлетворяет соотношению $\delta(d\sigma) = 2H\lambda c d\sigma$, где H – средняя кривизна поверхности F^2; λ – заданное число, называемое коэффициентом рекуррентности;

2) для любой точки поверхности F^2 ее единичный вектор нормали n^α, параллельно перенесенный в R^3 в смысле Леви-Чивита в направлении вектора z^α в соответствующую точку поверхности F_ε^2, совпадает с вектором нормали n_ε^α к F_ε^2 в этой точке.

Зададим на краю ∂F^2 поверхности F^2 отличное от нуля векторное поле

$$l^\alpha = l_\tau^\alpha + l_n^\alpha, \tag{1}$$

где $l_\tau^\alpha = l^i y_{,i}^\alpha$ – тангенциальная составляющая поля l^α; $l_n^\alpha = l^3 n^\alpha$ – нормальная составляющая поля l^α; l^1, l^2, l^3 – заданные функции класса $C^{1,\nu}$, $0<\nu<1$. Будем рассматривать бесконечно малые ARG-деформации поверхности F^2, подчиненной на краю ∂F^2 условию

$$a_{\alpha\beta} z^\alpha l^\beta = h, \tag{2}$$

где h – заданная функция класса $C^{1,\nu}$, $0<\nu<1$. Это условие назовем условием обобщенной втулочной связи.

Обобщенная втулочная связь называется корректной [2], если для любой функции h существует единственное поле смещения z^α, удовлетворяющее условию (2), при этом малому изменению функции h (в смысле некоторой нормы) соответствует малое изменение поля z^α.

Обобщенная втулочная связь называется некорректной [2], если при $h \neq 0$ поверхность допускает бесконечно малые деформации лишь при выполнении конечного числа условий разрешимости, налагаемых на функцию h, а при $h \equiv 0$ поверхность допускает конечное число линейно независимых бесконечно малых деформаций.

2. Вывод уравнения бесконечно малых ARG-деформаций

Выведем уравнение, описывающее бесконечно малые ARG-деформации поверхности F^2 положительной внешней кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$. Здесь и далее в этой работе будем считать, что на поверхности введена изотермически-сопряженная параметризация, т.е. вторая квадратичная форма поверхности имеет вид $\mathrm{II} = \Lambda((dx^1)^2 + (dx^2)^2)$. Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть* $(m+1)$*-связная поверхность* F^2 *положительной внешней кривизны* $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, *в римановом пространстве* R^3, *удовлетворяющая условиям регулярности, подвергнута бесконечно малой* ARG*-деформации с заданным коэффициентом рекуррентности* λ *и с полем смещения* $z^\alpha = a^i y_{,i}^\alpha + c n^\alpha$. *Тогда уравнение для функции* c *в координатной форме имеет вид*

$$\sum_{i=1}^{2} \partial_i \left(\frac{\sqrt{g}}{\Lambda} \partial_i c \right) + (1+\lambda) 2H \sqrt{g} c = 0 .$$

При этом функции a^i *находятся по формуле* $a^i = -\dfrac{\partial_i c}{\Lambda}$.

Доказательство. Известно [1], что уравнение для функции *c*, возникающее при ARG-деформации поверхности F^2 с коэффициентом рекуррентности λ, при условии $K \ge k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, имеет вид

$$\partial_k(\sqrt{g}\tilde{b}^{ik}\partial_i c) + (1+\lambda)2H\sqrt{g}c = 0,$$

где $g = \det\|g_{ij}\|$, $g_{ij} = a_{\alpha\beta}y_{,i}^{\alpha}\, y_{,j}^{\beta}$, $\|\tilde{b}^{ij}\|$ – матрица, обратная к матрице $\|b_{ij}\|$ коэффициентов второй квадратичной формы поверхности F^2, $\partial_i c = \dfrac{\partial c}{\partial x^i}$. Координаты a^i находятся из выражения $a^i = -\tilde{b}^{ij}\partial_j c$. Так как на поверхности F^2 введена изотермически-сопряженная параметризация, т.е.

$$\mathrm{II} = \Lambda\left((dx^1)^2 + (dx^2)^2\right),$$

то $b_{11} = b_{22} = \Lambda$, $b_{12} = 0$, при этом $\tilde{b}^{11} = \tilde{b}^{22} = \dfrac{1}{\Lambda}$, $\tilde{b}^{12} = 0$, где $(x^1, x^2) \in D$. Тогда уравнение для функции c, описывающее ARG-деформацию поверхности F^2 с коэффициентом рекуррентности λ, в этих координатах примет вид

$$\sum_{i=1}^{2}\partial_i\left(\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}\partial_i c\right) + (1+\lambda)2H\sqrt{g}c = 0,\ (x^1, x^2) \in D,$$

где c – искомая функция.

При этом функции a^i находятся по формуле $a^i = -\dfrac{\partial_i c}{\Lambda}$. Лемма доказана.

3. Вывод условия обобщенной втулочной связи

Дадим аналитическую запись условия обобщенной втулочной связи. Отметим, что при изотермически-сопряженной параметризации тангенциальная составляющая l_{τ}^{α} поля l^{α} переходит в поле векторов $l_{\tau} = \{l_1, l_2\}$ на границе ∂D области D в плоскости (x^1, x^2). Имеет место

Лемма 2. *Пусть на краю* ∂F^2 *поверхности* F^2 *задано векторное поле* (1). *Пусть, далее, поверхность* F^2 *при бесконечно малой* ARG*-деформации подчинена вдоль края* ∂F^2 *условию обобщенной втулочной связи* (2). *Тогда это условие можно представить в виде*

$$\sqrt{l_1^2 + l_2^2}\,\frac{\partial c}{\partial l} - \Lambda l^3 c = -\Lambda h \text{ на } \partial D, \qquad (3)$$

где $\dfrac{\partial c}{\partial l}$ *– производная по направлению*

$$l = \left\{ \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}, \frac{l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \right\} = \{\tilde{l}_1, \tilde{l}_2\}$$

в плоскости (x^1, x^2), $l_i = g_{ij} l^j$.

Доказательство. Так как координаты векторного поля смещения z^α имеют вид $z^\alpha = a^i y_{,i}^\alpha + cn^\alpha$, а координаты l^α имеют вид $l^\alpha = l^i y_{,i}^\alpha + l^3 n^\alpha$, то

$$a_{\alpha\beta} z^\alpha l^\beta = a_{\alpha\beta}(a^i y_{,i}^\alpha + cn^\alpha)(l^j y_{,j}^\beta + l^3 n^\beta) = a_{\alpha\beta} y_{,i}^\alpha y_{,j}^\beta a^i l^j +$$

$$+ a_{\alpha\beta} y_{,j}^\beta n^\alpha c l^j + a_{\alpha\beta} y_{,i}^\alpha n^\beta a^i l^3 + a_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta c l^3 = g_{ij} a^i l^j + c l^3 =$$

$$= a^i l_i + c l^3 = \left(-\frac{\partial_1 c}{\Lambda} l_1 \right) + \left(-\frac{\partial_2 c}{\Lambda} l_2 \right) + c l^3 = -\frac{1}{\Lambda}(\partial_1 c \cdot l_1 + \partial_2 c \cdot l_2) + c l^3 .$$

Подставим последнее равенство в (2) и получим

$$\partial_1 c \cdot l_1 + \partial_2 c \cdot l_2 - \Lambda c l^3 = -\Lambda h . \tag{4}$$

Умножим (4) на $\dfrac{1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}$ и получим

$$\frac{\partial c}{\partial l} - \frac{\Lambda l^3 c}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} = -\frac{\Lambda h}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}},$$

где $\dfrac{\partial c}{\partial l} = \partial_1 c \cdot \tilde{l}_1 + \partial_2 c \cdot \tilde{l}_2$ – производная по направлению $l = \{\tilde{l}_1, \tilde{l}_2\}$ в плоскости (x^1, x^2). Умножим последнее равенство на $\sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ и получим $\sqrt{l_1^2 + l_2^2} \dfrac{\partial c}{\partial l} - \Lambda l^3 c = -\Lambda h$, что совпадает с (3). Лемма доказана.

4. Корректные обобщенные втулочные связи при бесконечно малых ARG-деформациях поверхностей

Для формулировки результатов введем в рассмотрение правый сопровождающий трехгранник Френе $\{t^\alpha, \eta^\alpha, n^\alpha\}$ края ∂F^2 поверхности F^2, где t^α – поле единичных векторов касательных к краю ∂F^2; η^α – поле единичных векторов тангенциальных нормалей к краю ∂F^2, n^α – поле единичных векторов нормалей к краю ∂F^2.

В этом пункте будем рассматривать бесконечно малые ARG-деформации поверхности F^2, подчиненной на краю ∂F^2 условию обобщенной втулочной связи

$$a_{\alpha\beta} z^\alpha l^\beta = h , \tag{5}$$

где поле $l^\alpha = l^i y_{,i}^\alpha + l^3 n^\alpha$ таково, что его тангенциальная составляющая $l_\tau^\alpha = l^i y_{,i}^\alpha$ образует тупой угол с тангенциальной нормалью η^α края поверхности F^2, координата $l^3 \le 0$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть* $(m+1)$*-связная поверхность* F^2 *положительной внешней кривизны* $K \ge k_0 > 0$, $k_0 = \mathrm{const}$, *в римановом пространстве* R^3 *удовлетворяет условиям регулярности, ориентирована так, что средняя кривизна* $H > 0$, *и подвергнута бесконечно малой* ARG*-деформации с заданным коэффициентом рекуррентности* λ, $\lambda < -1$. *Пусть далее поверхность* F^2 *подчинена на краю* ∂F^2 *условию обобщенной втулочной связи* (5). *Тогда эта связь является корректной в классе* $C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$, *в отношении бесконечно малых* ARG*-деформаций с заданным коэффициентом рекуррентности* λ, $\lambda < -1$. *Причем поле смещения* z^α *принадлежит классу* $C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$, *а его нормальная составляющая* cn^α *принадлежит классу* $C^{2,\nu}$, $0 < \nu < 1$.

Доказательство. Нахождение бесконечно малых ARG-деформаций поверхности F^2 с полем смещения $z^\alpha = a^i y_{,i}^\alpha + cn^\alpha$ при условии обобщенной втулочной связи (5), как было показано в леммах 1 и 2, сводится к изучению разрешимости краевой задачи

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} \partial_i \left(\frac{\sqrt{g}}{\Lambda} \partial_i c \right) + (1+\lambda) 2H \sqrt{g} c = 0 \text{ в } D, \\ \sqrt{l_1^2 + l_2^2} \frac{\partial c}{\partial l} - \Lambda l^3 c = \tilde{h} \text{ на } \partial D, \end{cases} \tag{6}$$

где $\tilde{h} = -\Lambda h$; $\sqrt{g} \in C^{2,\nu}$, $\Lambda \in C^{1,\nu}$, $H \in C^{1,\nu}$, $l \in C^{1,\nu}$, $l^3 \in C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$.

При этом функции a^i находятся по формуле $a^i = -\frac{\partial_i c}{\Lambda}$.

Так как внешняя кривизна поверхности положительна $K \ge k_0 > 0$, $k_0 = \mathrm{const}$, то уравнение задачи (6) является эллиптическим. В силу ориентации поверхности $\Lambda > 0$, поэтому $\frac{\sqrt{g}}{\Lambda} > 0$. По условию теоремы $\lambda < -1$ и $H > 0$, поэтому для уравнения задачи (6) имеем $(1+\lambda) 2H \sqrt{g} < 0$. Так как тангенциальная составляющая l_τ^α поля l^α образует тупой угол с тангенциальной нормалью η^α края поверхности F^2, то при изотермически-сопряженной параметризации прообраз l_τ вектора l_τ^α и прообраз η вектора η^α образуют тупой угол в плоскости (x^1, x^2). Следовательно, вектор l_τ образует острый угол с внешней нормалью к области D. Поэтому краевая задача (6) является третьей краевой задачей. По условию теоремы функция $l^3 \le 0$, поэтому $-\Lambda l^3 \ge 0$. В силу сказанного задача (6) для любой заданной функции h класса $C^{1,\nu}$, $0<\nu<1$, имеет единственное решение c класса $C^{2,\nu}$, $0<\nu<1$. Это решение можно представить в виде

$$c(x^1,x^2)=\int\limits_{\partial D} F(x^1,x^2,y^1,y^2)\tilde{h}(y^1,y^2)d_y\sigma,$$

где F – функция Грина рассматриваемой задачи. При этом справедлива оценка

$$\|c\|_{C^{2,\nu}(\bar{D})}\le P\|\tilde{h}\|_{C^{1,\nu}(\partial D)},\tag{7}$$

где $P=\text{const}$.

По известной функции c однозначно восстанавливается поле смещения z^α, совместимое с заданной обобщенной втулочной связью поверхности F^2 вдоль края ∂F^2. При этом поле смещения z^α является полем класса $C^{1,\nu}$, $0<\nu<1$, в области $\bar{D}$, причем его нормальная составляющая cn^α принадлежит классу $C^{2,\nu}$, $0<\nu<1$.

Покажем, что при сделанных предположениях данная связь является корректной. Для этого необходимо убедиться, что малому изменению величины $\tilde{h}$ в классе $C^{1,\nu}$, $0<\nu<1$, соответствует малое изменение поля смещения z^α в классе $C^{1,\nu}$, $0<\nu<1$.

Запишем задачу (6) в операторном виде:

$$\begin{cases} Lc=0 \text{ в } D, \\ Bc=\tilde{h} \text{ на } D, \end{cases}\tag{8}$$

где $L=\sum\limits_{i=1}^{2}\partial_i\left(\frac{\sqrt{g}}{\Lambda}\partial_i\right)+(1+\lambda)2H\sqrt{g}$, $B=\sqrt{l_1^2+l_2^2}\,\frac{\partial}{\partial l}-\Lambda l^3$.

Пусть имеем два значения величины $\tilde{h}$: $\tilde{h}=h_1$, $\tilde{h}=h_2$. Обозначив решение задачи (8) при $\tilde{h}=h_1$ через c_1, а при $\tilde{h}=h_2$ через c_2, получим

$$\begin{cases} Lc_1=0 \text{ в } D, \\ Bc_1=\tilde{h}_1 \text{ на } D, \end{cases}\quad \begin{cases} Lc_2=0 \text{ в } D, \\ Bc_2=\tilde{h}_2 \text{ на } D. \end{cases}$$

Тогда, вычитая из первой полученной задачи вторую, находим

$$\begin{cases} L(c_1-c_2)=0 \text{ в } D, \\ B(c_1-c_2)=h_1-h_2 \text{ на } D. \end{cases}\tag{9}$$

В силу оценки (7) для задачи (9) имеем

$$\|c_1-c_2\|_{C^{2,\nu}(\bar{D})}\le P\|h_1-h_2\|_{C^{1,\nu}(\partial D)}.$$

Далее имеем

$$z_1^\alpha-z_2^\alpha=(a_1^1-a_2^1)y_1^\alpha+(a_1^2-a_2^2)y_2^\alpha+(c_1-c_2)n^\alpha=$$

$$= -\frac{1}{\Lambda}\partial_1(c_1 - c_2)y_1^\alpha - \frac{1}{\Lambda}\partial_2(c_1 - c_2)y_2^\alpha + (c_1 - c_2)n^\alpha,$$

где z_i^α – векторное поле, соответствующее решению задачи (8) при $\tilde{h} = h_i$.

Так как

$$\|\partial_1(c_1 - c_2)\|_{C^{1,\nu}(\bar{D})} \le \|c_1 - c_2\|_{C^{2,\nu}(\bar{D})}, \ \|\partial_2(c_1 - c_2)\|_{C^{1,\nu}(\bar{D})} \le \|c_1 - c_2\|_{C^{2,\nu}(\bar{D})},$$

то

$$\left\|z_1^\beta - z_2^\beta\right\|_{C^{1,\nu}(\bar{D})} \le \frac{1}{\Lambda}\|c_1 - c_2\|_{C^{2,\nu}(\bar{D})} + \frac{1}{\Lambda}\|c_1 - c_2\|_{C^{2,\nu}(\bar{D})} + \|c_1 - c_2\|_{C^{2,\nu}(\bar{D})}.$$

Следовательно,

$$\left\|z_1^\alpha - z_2^\alpha\right\|_{C^{1,\nu}(\bar{D})} \le \frac{2+\Lambda}{\Lambda}\|c_1 - c_2\|_{C^{2,\nu}(\bar{D})} \le \frac{P}{\Lambda}(2+\Lambda)\|h_1 - h_2\|_{C^{1,\nu}(\partial D)}.$$

Таким образом, малому изменению величины $\tilde{h}$ соответствует малое изменение поля смещения z^α в классе $C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$. Следовательно, обобщенная втулочная связь (5) является корректной в классе $C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$, в отношении бесконечно малых ARG-деформаций с заданным коэффициентом рекуррентности λ, $\lambda < -1$. Теорема доказана.

Замечание. Если коэффициент рекуррентности ARG-деформации $\lambda = -1$ и обобщенная втулочная связь (5) такова, что $l^3 < 0$, то эта связь является корректной в классе $C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$, в отношении ARG-деформации с коэффициентом рекуррентности $\lambda = -1$.

5. Распределение некорректных обобщенных втулочных связей поверхностей при бесконечно малых ARG-деформациях поверхностей

Исследуем корректность обобщенной втулочной связи $a_{\beta\gamma}z^\beta l^\gamma = h$, освободившись от требований, налагаемых на функцию l^3 в теореме 1. Для изучения этого вопроса исследуем поведение поверхности при обобщенных втулках, которые выбираются из некоторого семейства обобщенных втулок. С этой целью рассмотрим заданное вдоль края ∂F^2 поверхности F^2 векторное поле $l_{(1)}^\alpha = l^i y_{,i}^\alpha + l_0^3 n^\alpha$, где тангенциальная составляющая $l_\tau^\alpha = l^i y_{,i}^\alpha$ сопряжена с направлением t^α края поверхности F^2 и образует тупой угол с тангенциальной нормалью η^α края поверхности F^2, координата $l_0^3 > 0$, $l^1, l^2, l_0^3 \in C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$.

Введем в рассмотрение семейство векторных полей $l_{(\mu)}^\alpha = l^i y_{,i}^\alpha + \mu l_0^3 n^\alpha$, где μ – числовой параметр. Каждое поле этого семейства порождает обобщенную втулочную связь

$$a_{\alpha\beta}z^\alpha l_{(\mu)}^\beta = h. \quad (10)$$

Поведение поверхности, подчиненной таким обобщенным втулочным связям, дается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть* $(m+1)$*-связная поверхность* F^2 *положительной внешней кривизны* $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \mathrm{const}$, *в римановом пространстве* R^3 *удовлетворяет условиям регулярности, ориентирована так, что ее средняя кривизна* $H > 0$, *и подвергнута бесконечно малой* ARG*-деформации с заданным коэффициентом рекуррентности* λ, *где* $\lambda < -1$. *Пусть далее поверхность* F^2 *подчинена на краю* ∂F^2 *условию обобщенной втулочной связи* (10). *Тогда существует точно счетное множество* $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *значений* μ, $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_k \leq \ldots$, $\mu_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$ *таких, что при заданном* μ:

а) $\mu \neq \mu_k$, *поверхность* F^2 *допускает единственную бесконечно малую* ARG*-деформацию с заданным коэффициентом рекуррентности* λ, *где* $\lambda < -1$, *при условии обобщенной втулочной связи* (10);

б) $\mu = \mu_k$, *обобщенная втулочная связь является некорректной в классе* $C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$, *в отношении бесконечно малых* ARG*-деформаций с заданным коэффициентом рекуррентности* λ, *где* $\lambda < -1$.

Доказательство. Нахождение бесконечно малых ARG-деформаций поверхности F^2 с полем смещения $z^{\alpha} = a^i y_{,i}^{\alpha} + cn^{\alpha}$ при условии обобщенной втулочной связи (10), как было показано в леммах 1 и 2, сводится к изучению разрешимости краевой задачи

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} \partial_i \left(\frac{\sqrt{g}}{\Lambda} \partial_i c \right) + (1+\lambda) 2H \sqrt{g} c = 0 \text{ в } D, \\ \sqrt{l_1^2 + l_2^2} \frac{\partial c}{\partial l} - \mu \Lambda l^3 c = \tilde{h} \text{ на } \partial D, \end{cases} \tag{11}$$

где $\tilde{h} = -\Lambda h$, $\sqrt{g} \in C^{2,\nu}$, $\Lambda \in C^{1,\nu}$, $H \in C^{1,\nu}$, $l \in C^{1,\nu}$, $l_0^3 \in C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$.

При этом функции a^i находятся по формуле $a^i = -\frac{\partial_i c}{\Lambda}$.

Перепишем задачу (11) в виде

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} \partial_i \left(\frac{\sqrt{g}}{\Lambda} \partial_i c \right) + (1+\lambda) 2H \sqrt{g} c = 0 \text{ в } D, \\ \sqrt{l_1^2 + l_2^2} \frac{\partial c}{\partial l} = h^* \text{ на } \partial D, \end{cases} \tag{12}$$

где $h^* = \tilde{h} + \mu l_0^3 \Lambda c$.

Так как внешняя кривизна поверхности положительна $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \mathrm{const}$, то уравнение задачи (12) является эллиптическим. В силу ориентации поверхности $\Lambda > 0$, поэтому $\frac{\sqrt{g}}{\Lambda} > 0$. По условию теоремы $\lambda < -1$ и

$H > 0$, поэтому для уравнения задачи (12) имеем $(1+\lambda)2H\sqrt{g} < 0$. Так как тангенциальная составляющая сопряжена с направлением t^{α} края поверхности F^2 и образует тупой угол с тангенциальной нормалью η^{α} края поверхности F^2, то при изотермически-сопряженной параметризации направление прообраза l_{τ} вектора l_{τ}^{α} совпадает с направлением внешней нормали к области D в плоскости (x^1, x^2). Поэтому задача (12) является задачей Неймана. Для задачи (12), считая функцию h^* известной, выполняется теорема существования и единственности, так как $\lambda < -1$.

Решение задачи (12) можем представить в виде

$$c(x^1, x^2) = \int\limits_{\partial D} F(x^1, x^2, \varphi(\sigma), \psi(\sigma)) h^*(\sigma) d\sigma, \tag{13}$$

где F – функция Грина задачи (12); $d\sigma$ – элемент длины дуги ∂D, $(x^1, x^2) \in \bar{D}$, $x^1 = \varphi(s)$, $x^2 = \psi(s)$; $s \in [s_1, s_2]$ – уравнение границы ∂D.

Сведем краевую задачу (12) к интегральному уравнению на контуре ∂D. С этой целью преобразуем формулу (13), подставив в нее явный вид функции h^*. Имеем

$$c(x^1, x^2) - \mu \int\limits_{\partial D} F(x^1, x^2, \varphi(\sigma), \psi(\sigma)) \chi(\sigma) c(\sigma) d\sigma = g(x^1, x^2), \tag{14}$$

где $(x^1, x^2) \in \bar{D}$, $g(x^1, x^2) = \int\limits_{\partial D} F(x^1, x^2, \varphi(\sigma), \psi(\sigma)) \tilde{h}(\sigma) d\sigma$ – известная функция в $\bar{D}$, $c(\sigma) = c(\varphi(\sigma), \psi(\sigma))$, $\chi(\sigma) = l_0^3(\sigma)\Lambda(\sigma)$.

Функцию Грина на контуре ∂D запишем в виде

$$\tilde{F}(s, \sigma) \equiv F(\varphi(s), \psi(s), \varphi(\sigma), \psi(\sigma)).$$

Тогда, переходя в уравнении (14) на контур ∂D, получим интегральное уравнение относительно искомой функции $c(\varphi(s), \psi(s)) = c(s)$:

$$c(s) - \mu \int\limits_{\partial D} K(s, \sigma) c(\sigma) d\sigma = g(s), \tag{15}$$

где $K(s, \sigma) = \tilde{F}(s, \sigma)\chi(\sigma)$, $g(s)$ – известная функция на ∂D.

Изучим разрешимость уравнения (15). Задача (12) является самосопряженной. Известно, что для самосопряженной задачи функция Грина является симметричной, а значит, $\tilde{F}(s, \sigma)$ является симметричной функцией. Ядро уравнения (15) несимметрично, но оно симметризуемо. В самом деле, умножим обе части уравнения (15) на $\sqrt{\chi(s)}$, где $\chi(s) > 0$, и введем новую искомую функцию $\tilde{c}(s) = \sqrt{\chi(s)} c(s)$. Тогда уравнение (15) приводится к линейному интегральному уравнению вида

$$\tilde{c}(s) - \mu \int_{\partial D} \tilde{K}(s,\sigma)\tilde{c}(\sigma)d\sigma = \tilde{g}(s), \qquad (16)$$

где $\tilde{K}(s,\sigma) = \sqrt{\chi(s)\chi(\sigma)}\tilde{F}(s,\sigma)$ – симметричное ядро, $\tilde{g}(s) = \sqrt{\chi(s)}g(s)$.

Известно, что симметричное и не равное тождественно нулю ядро имеет по крайней мере одно собственное значение. Так как заданная функция l_0^3 является положительной, то при $\mu \le 0$ задача (11) имеет единственное решение в силу теоремы 1 в классе $C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$. Поэтому собственные значения μ_k $(k = 1,2,...)$ уравнения (16) будут положительны.

Занумеруем собственные значения μ_k $(k = 1,2,...)$ уравнения (16) так, чтобы их номера возрастали по мере увеличения соответствующих значений μ_k, т.е. $0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \ldots \le \mu_k \le \ldots$ Убедимся, что для уравнения (16) существует точно счетное множество собственных значений.

Так как собственные значения $\mu = \mu_k$ $(k = 1,2,...)$ уравнения (16) положительны, то ядро $\tilde{K}(s,\sigma)$ будет положительно определено.

Покажем, что ядро $\tilde{K}(s,\sigma)$ полное, т.е. $\int_{\partial D} \tilde{K}(s,\sigma) f(\sigma)d\sigma = 0$, где $f(s)$ – искомая функция, имеет только нулевое решение.

Пусть $f(s)$ – решение уравнения $Af = 0$, где $Af = \int_{\partial D} \tilde{K}(s,\sigma) f(\sigma)d\sigma$.

Обозначим

$$z(x^1,x^2) = \int_{\partial D} F(x^1,x^2,\varphi(\sigma),\psi(\sigma))\sqrt{\chi(\sigma)} f(\sigma)d\sigma, \qquad (17)$$

где $(x^1,x^2) \in \bar{D}$.

Тогда $z(x^1,x^2)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} \partial_i \left(\dfrac{\sqrt{g}}{\Lambda} \partial_i c \right) + (1+\lambda) 2H\sqrt{g}c = 0 \text{ в } D, \\ \sqrt{l_1^2 + l_2^2}\, \dfrac{\partial c}{\partial l} = \sqrt{\chi(s)} f(s) \text{ на } \partial D. \end{cases} \qquad (18)$$

Перейдем в уравнении (17) на контур ∂D. Получим

$$z(s) = \int_{\partial D} \tilde{F}(s,\sigma)\sqrt{\chi(\sigma)} f(\sigma)d\sigma. \qquad (19)$$

Умножим (19) на $\sqrt{\chi(s)}$. Имеем

$$\sqrt{\chi(s)}z(s) = \int_{\partial D} \tilde{F}(s,\sigma)\sqrt{\chi(s)\chi(\sigma)} f(\sigma)d\sigma. \qquad (20)$$

Так как в наших обозначениях $\tilde{K}(s,\sigma) = \sqrt{\chi(s)\chi(\sigma)}\tilde{F}(s,\sigma)$, где $\tilde{K}(s,\sigma)$ – ядро уравнения (16), то формулу (20) можно записать в виде

$$\sqrt{\chi(s)}z(s) = \int_{\partial D} \tilde{K}(s,\sigma) f(\sigma) d\sigma . \tag{21}$$

Но функция $f(s)$ есть решение уравнения $Af = 0$, т.е. $\int_{\partial D} \tilde{K}(s,\sigma) f(\sigma) d\sigma = 0$. Тогда из (21) следует, что $\sqrt{\chi(s)}z(s) = 0$, поэтому $z(s) = 0$ на границе ∂D. Но тогда $z(x^1, x^2)$ в области D находится как решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2} \partial_i \left(\dfrac{\sqrt{g}}{\Lambda} \partial_i c \right) + (1+\lambda) 2H \sqrt{g} z = 0 \text{ в } D, \\ z = 0 \text{ на } \partial D, \end{cases} \tag{22}$$

Так как $(1+\lambda)2H\sqrt{g} < 0$ и $\dfrac{\sqrt{g}}{\Lambda} > 0$, то задача (22) имеет единственное решение $z(x^1, x^2) = 0$, $(x^1, x^2) \in \bar{D}$. Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial l} \equiv 0$ на ∂D. В силу краевого условия задачи (18) имеем $\sqrt{\chi(s)} f(s) = 0$ на ∂D, т.е. $f(s) \equiv 0$ на ∂D.

Итак, доказано, что уравнение $\int_{\partial D} \tilde{K}(s,\sigma) f(\sigma) d\sigma = 0$ имеет только нулевое решение, а значит, что ядро $\tilde{K}(s,\sigma)$ полное. Откуда следует, что система собственных функций ядра бесконечна. Таким образом, установлено, что существует счетное множество собственных значений уравнения (16). Восстановление поля деформации z^{α} по известной функции c проводится всегда и однозначно с помощью методов, описанных в разд. 2. Если $\mu \neq \mu_k$, то уравнение (16) имеет единственное решение в классе $C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$. Теорема доказана.

Список литературы

1. **Fomenko, V. T.** *ARG*-deformations of a hypersurface with a boundary in a Riemannian space / V. T. Fomenko // Tensor N.S. – 1993. – V. 54. – Chigasaki, Japan.
2. **Векуа, И. Н.** Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа ; под ред. О. А. Олейник и Б. В. Шабата. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, 1988. – 512 с.

Коломыцева Елена Алексеевна
аспирант, Таганрогский государственный педагогический институт

Kolomytseva Elena Alekseevna
Postgraduate student,
Taganrog State Pedagogical University

E-mail: kolomytseva86@mail.ru

УДК 514.75

Коломыцева, Е. А.

Существование обобщенных втулочных связей, совместимых с *ARG*-деформациями поверхностей в римановом пространстве / Е. А. Коломыцева // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 4 (16). – С. 14–25.